

# One Counterexample of Comonotone Approximation of $2\pi$ -periodic Function on Trigonometric Polynomials

Pleshakov Mikhail Gennad'evich, Saratov State University, Russia,  
410012, Saratov, Astrakhanskaya st., 83, pleshakovmg@gmail.com

**Abstract.** Let  $2s$  points  $y_i = -\pi \leq y_{2s} < \dots < y_1 < \pi$  be given. Using these points, we define the points  $y_i$  for all integer indices  $i$  by the equality  $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ . We shall write  $f \in \Delta^{(1)}(Y)$  if  $f$  is a  $2\pi$ -periodic function and  $f$  does not decrease on  $[y_i, y_{i-1}]$  if  $i$  is odd; and  $f$  does not increase on  $[y_i, y_{i-1}]$  if  $i$  is even. We denote  $E_n^{(1)}(f; Y)$  the value of the best uniform comonotone approximation. In this article the following counterexample of comonotone approximation is proved.

**Example.** For each  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 3$ , and  $n \in \mathbb{N}$  there a function  $f(x) := f(x; s, Y, n, k)$  exists, such that  $f \in \Delta^{(1)}(Y) \cap \mathbb{C}^{(1)}$  and

$$E_n^{(1)}(f; Y) > B_Y n^{\frac{k}{3}-1} \frac{1}{n} \omega_k \left( f'; \frac{1}{n} \right),$$

where  $B_Y = \text{const}$ , depending only on  $Y$  and  $k$ ;  $\omega_k$  is the modulus of smoothness of order  $k$ , of  $f$ .

*Keywords:* trigonometric polynomials, polynomial approximation, shape-preserving.

Получение оценки уклонения при равномерном приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами и тригонометрическими полиномами является одной из основных задач в теории приближения функций. Наиболее широкое применение в теоретических исследованиях и в прикладных областях математики получили неравенства типа Джексона-Зигмунда-Стечкина [1-3], типа Никольского-Тимана-Дзядыка-Фрейда-Теляковского-Брудного [4-9]. Особый интерес представляет случай, когда приближение является формосохраняющим (Shape-preserving Approximation), т.е. когда аппарат приближения сохраняет некоторые свойства приближаемой функции (монотонность, выпуклость и т.д.) В 1969 году G.G. Lorentz и K.L. Zeller [10] построили пример, который показывает, что величина наилучшего монотонного приближения алгебраическими многочленами монотонной функции по порядку вообще говоря “хуже” величины наилучшего приближения без ограничений. В 1979 году А.С. Шведов [11, 12] построил пример, показывающий, что оценка типа Джексона-Стечкина величины приближения монотонной функции монотонными многочленами через модуль непрерывности порядка 3 и выше вообще неверна, в отличие от приближения без ограничений.

Однако результаты по комонотонному приближению периодических функций тригонометрическими полиномами, за исключением результата G.G. Lorentz и K.L. Zeller 1968 года, касающегося так называемых “колоколообразных” функций долгое время не были известны.

В данной статье построен контрпример, указывающий, что оценка типа Джексона-Стечкина величины приближения кусочно-монотонной периодической функции комонотонными тригонометрическими полиномами через модуль непрерывности порядка 3 и выше вообще неверна.

Пусть  $\mathbb{C}$  – пространство непрерывных  $2\pi$ -периодических действительных функций  $f$  с равномерной нормой  $\|f\| := \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ ;  $\omega(f; t)$  – модуль непрерывности функции

$f; \mathbb{T}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , – пространство тригонометрических полиномов

$$\tau_n(x) := a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

порядка  $\leq n$ .

Пусть на промежутке  $[-\pi, \pi)$  заданы  $2s$  точек  $y_i$ :  $-\pi \leq y_{2s} < y_{2s-1} < \dots < y_1 < \pi$ . Отправляясь от этих точек, при помощи равенства  $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$  определим точки  $y_i$  для всех целых индексов  $i$ ; в частности,  $y_0 = y_{2s} + 2\pi$ ,  $y_{2s+1} = y_1 - 2\pi$  и т.д. Обозначим  $Y := \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ . Множество всех таких наборов обозначим  $\mathbb{Y}_{2s}$ . Будем писать

$$f \in \Delta^{(1)}(Y),$$

если  $f(x)$  –  $2\pi$ -периодическая непрерывная функция и  $f(x)$  не убывает на  $[y_i, y_{i-1}]$ , если  $i$  нечетное;  $f(x)$  не возрастает на  $[y_i, y_{i-1}]$ , если  $i$  четное.

Обозначим

$$\Pi(x) := \prod_{i=1}^{2s} \sin \frac{1}{2}(x - y_i),$$

и заметим, что  $\Pi \in \mathbb{T}_s$ , то есть  $\Pi(x)$  – тригонометрический полином порядка  $s$ .

Зафиксируем  $s \in \mathbb{N}$  и набор  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = Y \in \mathbb{Y}_{2s}$ . В силу периодичности без потери общности будем считать, что точка 0 принадлежит набору  $Y$ , т.е.  $y_{i_*} = 0$  при некотором  $i_* \in \mathbb{Z}$ .

Обозначим

$$\Pi_*(x) := \prod_{i=1}^{2s} \sin \frac{x - y_i}{2}.$$

Для определённости будем считать, что  $i_*$  – нечётное число. Тогда

$$\Pi_*(0) > 0. \quad (1)$$

Обозначим через  $2d$  расстояние от  $y_{i_*}$  до ближайшей точки набора  $Y$ , заметим,

$$d \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\Pi_*(x) > 0, \quad x \in (-2d, 2d). \quad (2)$$

Положим

$$M := \max_{x \in \mathbb{R}} |\Pi_*(x)|, \quad M_1 := \max_{x \in \mathbb{R}} |\Pi'_*(x)|,$$

$$m := \min_{x \in [-d, d]} \Pi_*(x).$$

Отправляясь от набора  $Y$ , определим натуральное число  $N$ . А именно, обозначим через  $N$  наименьшее из чисел, удовлетворяющих неравенству

$$m \sin^3 \frac{d}{8} \geq \frac{5}{N} (M + M_1). \quad (3)$$

Тогда

$$m \sin \frac{d}{8} \geq \frac{5}{N} (M + M_1), \quad (4)$$

следовательно

$$d > \frac{40}{N}. \quad (5)$$

Выберем натуральное число  $j^*$  из условия

$$\frac{\pi}{N} + j^* \frac{2\pi}{N} \leq d < \frac{\pi}{N} + (j^* + 1) \frac{2\pi}{N}.$$

Обозначим

$$d^* := \frac{\pi}{N} + j^* \frac{2\pi}{N}$$

и заметим,

$$\frac{1}{2}d < d^* \leq d. \quad (6)$$

При построении контрпримера будет использовано ядро Джексона

$$J_N(t) = \frac{3}{2N(2N^2 + 1)} \left( \frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4.$$

Напомним (см. например [13, с. 127]), некоторые свойства ядра Джексона:

а)  $J_N(t)$  является чётным неотрицательным тригонометрическим полиномом порядка  $2N - 2$ ;

б)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_N(t) dt = 1; \quad (7)$$

в) для любой непрерывно дифференцируемой периодической функции  $g$  в каждой точке  $x$  имеет место неравенство

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (g(t) - g(x)) J_N(t - x) dt \right| \leq \frac{5}{N} \|g'\|. \quad (8)$$

Обозначим

$$\tilde{M} := \frac{1}{\pi} \|J_N\|,$$

$$\tilde{m} := \frac{1}{\pi} \min_{t \in [-\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}]} J_N(t - d^*) = \frac{1}{\pi} \min_{t \in [-\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}]} J_N(t + d^*),$$

и заметим, что  $\tilde{m} > 0$ . Наконец, положим

$$\overline{M} := 2 + \pi^3 \sqrt{\frac{M\tilde{M}}{m\tilde{m}}}.$$

Всюду далее в главе предполагаем, что число  $b$  удовлетворяет неравенствам

$$0 < b < \frac{\pi}{2N\overline{M}}, \quad (9)$$

в частности, с учетом (5) и (6),

$$\frac{d^* - 2b}{2} > \frac{d}{8}. \quad (10)$$

Для доказательства примера нам потребуется ряд лемм.

**Л е м м а 2.** *Для любого  $b$  найдётся положительное число  $\alpha_b < 1$  такое, что для функции*

$$Q(x) := Q(x; b) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) (\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*)) dt$$

*имеет место равенство*

$$Q(2\pi) = 0. \quad (11)$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Обозначим

$$Q_r(x, b) := Q_r(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) J_N(t-d^*) dt.$$

Представим  $Q_r(2\pi)$  в виде

$$\begin{aligned} Q_r(2\pi) &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{d^*-b}{2} \sin \frac{d^*+b}{2} \Pi(d^*) J_N(t-d^*) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) - \sin \frac{d^*-b}{2} \sin \frac{d^*+b}{2} \Pi(d^*) \right) J_N(t-d^*) dt \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

В силу (7) и (10)

$$I_1 = \sin \frac{d^*-b}{2} \sin \frac{d^*+b}{2} \Pi_*(d^*) \sin \frac{d^*}{2} > m_0 \sin^3 \frac{d}{8}.$$

Согласно (8)

$$|I_2| \leq \frac{5}{N} \left\| \left( \sin \frac{\cdot-b}{2} \sin \frac{\cdot+b}{2} \sin \frac{\cdot}{2} \Pi_*(\cdot) \right)' \right\| \leq \frac{5}{N} (M + M_1).$$

Поэтому в силу (3)

$$Q_r(2\pi) = I_1 + I_2 > 0.$$

Аналогично, обозначим

$$Q_l(x, b) := Q_l(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) J_N(t+d^*) dt.$$

Представим  $Q_l(2\pi)$  в виде

$$Q_l(2\pi) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{-d^* - b}{2} \sin \frac{-d^* + b}{2} \Pi(-d^*) J_N(t + d^*) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sin \frac{t - b}{2} \sin \frac{t + b}{2} \Pi(t) - \sin \frac{-d^* - b}{2} \sin \frac{-d^* + b}{2} \Pi(-d^*) \right) \cdot \\ \cdot J_N(t + d^*) dt = I_1 + I_2.$$

В силу (7) и (10)

$$I_1 = \sin \frac{-d^* - b}{2} \sin \frac{-d^* + b}{2} \Pi^*(-d^*) \sin \frac{-d^*}{2} < -m_0 \sin^3 \frac{d}{8}.$$

Согласно (8)

$$|I_2| \leq \frac{5}{N} \left\| \left( \sin \frac{\cdot - b}{2} \sin \frac{\cdot + b}{2} \sin \frac{\cdot}{2} \Pi_*(\cdot) \right)' \right\| \leq \frac{5}{N} (M + M_1).$$

Поэтому в силу (3)

$$Q_l(2\pi) = I_1 + I_2 < 0.$$

Теперь осталось выбрать  $\alpha_b$  из условия

$$\alpha_b Q_r(2\pi) + (1 - \alpha_b) Q_l(2\pi) = 0,$$

т.е.

$$\alpha_b = -\frac{Q_l(2\pi)}{Q_r(2\pi) - Q_l(2\pi)},$$

и заметить, что  $0 < \alpha_b < 1$ . Лемма доказана.

Равенство (11) означает, что  $Q$  есть тригонометрический полином порядка  $2N + s - 1$ .

*О п р е д е л е н и е 2.* При каждом  $b$  назовём “правым  $b$ -корытом”  $2\pi$ -периодическую функцию  $K_{r,b}(x)$ , имеющую свойства:

$$K_{r,b} \in \mathbb{C}^{(4)}; \\ 0 \leq K_{r,b}(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}; \\ K_{r,b}(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } -\frac{\overline{M}b}{2} \leq x \leq b, \\ 1, & \text{если } x \in [-\pi, -\overline{M}b] \cup [2b, \pi]; \end{cases} \quad (12)$$

“левым  $b$ -корытом”  $2\pi$ -периодическую функцию  $K_{l,b}(x)$ , имеющую свойства:

$$K_{l,b} \in \mathbb{C}^{(4)}; \\ 0 \leq K_{l,b}(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}; \\ K_{l,b}(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } -b \leq x \leq \frac{\overline{M}b}{2}, \\ 1, & \text{если } x \in [-\pi, -2b] \cup [\overline{M}b, \pi]. \end{cases}$$

Замечание. В примере достаточно, чтобы функция  $K_{r,b}$  была "просто" непрерывной. Поэтому в лемме 2 в качестве  $K_{r,b}$  можно взять, скажем, кусочно-линейную функцию. То же относится к  $K_{l,b}$ .

**Л е м м а 3.** Для любого  $b$  имеет место неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_{r,b}(t) \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) (\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*)) dt > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вследствие леммы 2

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) (\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*)) dt = 0,$$

поэтому достаточно доказать неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\frac{\overline{M}b}{2}}^{-b} \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) (\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*)) dt \right| > \\ & > \int_{-b}^{2b} \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) (\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*)) dt. \end{aligned}$$

Если  $-\frac{\overline{M}b}{2} \leq t \leq -b$ , то

$$\begin{aligned} & \left| \sin \frac{t-b}{2} \right| \geq \sin b > \frac{2b}{\pi}, \\ & |\Pi_*(t)| \geq m, \quad \left| \sin \frac{t}{2} \right| \geq \frac{b}{\pi}, \\ & \frac{1}{\pi} J_N(t-d^*) \geq \tilde{m}, \quad \frac{1}{\pi} J_N(t+d^*) \geq \tilde{m}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\frac{\overline{M}b}{2}}^{-b} \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) (\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*)) dt \right| > \\ & > \frac{2m\tilde{m}b^2}{\pi} \left| \int_{-\frac{\overline{M}b}{2}}^{-b} \sin \frac{t+b}{2} dt \right| = \frac{8m\tilde{m}b^2}{\pi} \sin^2 \frac{(1-\frac{\overline{M}}{2})b}{4} \geq \\ & \geq \frac{2m\tilde{m}(1-\frac{\overline{M}}{2})^2 b^4}{\pi^3}. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{2b} \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) (\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*)) dt < \\ < 3b(\sin b \sin \frac{3b}{2} \sin b) M \pi \tilde{M} < \frac{9\pi M \tilde{M} b^4}{2}. \end{aligned}$$

В силу выбора  $\overline{M}$  получаем

$$\frac{2m\tilde{m}(1-\frac{\overline{M}}{2})^2 b^4}{\pi^3} > \frac{9\pi M \tilde{M} b^4}{2}.$$

Лемма доказана.

Аналогично доказывается

**Л е м м а 4.** Для любого  $b$  имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} K_{l,b}(t) \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) (\alpha_b J_N(t-d^*) + \\ + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*)) dt < 0. \end{aligned}$$

Следствием предыдущих двух лемм является

**Л е м м а 5.** Для каждого  $b$  существует  $2\pi$ -периодическая 4 раза непрерывно дифференцируемая функция  $K_b(x)$ , которая имеет свойства:  $K_b(x) = 0$ , если  $|x| < b$ ;  $K_b(x) = 1$ , если  $\overline{M}b < |x| \leq \pi$ ;  $0 \leq K_b(x) \leq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;

$$\int_0^{2\pi} K_b(t) \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) (\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*)) dt = 0. \quad (13)$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Из лемм 3 и 4 следует, что

$$\begin{aligned} I_1 &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_{r,b}(t) \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) (\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*)) dt > 0; \\ I_2 &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_{l,b}(t) \sin \frac{t-b}{2} \sin \frac{t+b}{2} \Pi(t) (\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*)) dt < 0. \end{aligned}$$

Остаётся выбрать  $\gamma_b \in (0, 1)$  из условия

$$\gamma_b I_1 + (1-\gamma_b) I_2 = 0$$

и положить

$$K_b(x) := \gamma_b K_{r,b}(x) + (1-\gamma_b) K_{l,b}(x).$$

Лемма доказана.

Положим

$$q_b(x) := \sin \frac{(x-b)}{2} \sin \frac{(x+b)}{2} \sin \frac{x}{2},$$

$$g_b(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^x q_b(t) K_b(t) \frac{\Pi_*(t)}{M} (\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*)) dt, \quad (14)$$

$$Q_b(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^x q_b(t) \frac{\Pi_*(t)}{M} (\alpha_b J_N(t-d^*) + (1-\alpha_b) J_N(t+d^*)) dt. \quad (15)$$

В силу лемм 5 и 2  $g_b$  и  $Q_b$  суть непрерывные  $2\pi$ -периодические функции. Лемма 5 немедленно влечет следующие соотношения

$$g_b(x) = 0, \text{ когда } x \in [-b, b]; \quad (16)$$

$$g_b \in \mathbb{C}^{(5)} \cap \Delta^{(1)}(Y); \quad (17)$$

$$\|g_b\| < 1, \quad \|g'_b\| < \tilde{M}; \quad (18)$$

$$g'_b(x) = Q'_b(x), \quad \overline{M}b < |x| \leq \pi;$$

$$\|g'_b - Q'_b\| \leq \tilde{M} \frac{(\overline{M}-1)b}{2} \frac{(\overline{M}+1)b}{2} \frac{\overline{M}b}{2} \leq \frac{\tilde{M}\overline{M}^3 b^3}{8};$$

$$\|g_b - Q_b\| \leq \overline{M}b \|g'_b - Q'_b\| \leq \frac{\tilde{M}\overline{M}^4 b^4}{8}. \quad (19)$$

Легко видеть, что

$$Q''_b(0) = -\frac{1}{2} \sin^2 \frac{b}{2} \frac{\Pi_*(0)}{M} \frac{1}{\pi} J_N(d^*) < -\frac{1}{2\pi^2} \frac{m\tilde{m}}{M} b^2, \quad (20)$$

$$\|Q_b^{(k+1)}\| < M_k,$$

где  $M_k = \text{const}$ , не зависит от  $b$ ;

$$\omega_k(g'_b; t) \leq 2^k \|g'_b - Q'_b\| + t^k \|Q_b^{(k+1)}\| \leq 2^{k-3} \overline{M}^3 \tilde{M} b^3 + t^k M_k. \quad (21)$$

**Пример 2.** Для любых  $k > 3$  и  $n \in \mathbb{N}$  существует функция  $f_2(x) := f_2(x; s, Y, n, k)$  такая, что  $f_2 \in \Delta^{(1)}(Y) \cap \mathbb{C}^{(1)}$  и

$$E_n^{(1)}(f_2; Y) > B_Y n^{\frac{k}{3}-1} \frac{1}{n} \omega_k \left( f'_2; \frac{1}{n} \right), \quad (22)$$

где  $B_Y = \text{const}$ , зависит только от  $Y$  и  $k$ .

*Доказательство.* Пусть  $g(x) := g_b(x)$ ,  $Q(x) := Q_b(x)$ , где  $g_b(x)$  и  $Q_b(x)$  определены соответственно равенствами (14) и (15). Возьмем произвольный полином  $\tau_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ ,  $n > s + 2N - 1$ , и положим

$$R_n(x) := \tau_n(x) - Q(x).$$

Поскольку  $\tau_n \in \Delta^{(1)}(Y)$ , то  $\tau''_n(0) \geq 0$ , тогда в силу (20)

$$R''_n(0) = \tau''_n(0) - Q''(0) \geq -Q''(0) \geq \frac{m\tilde{m}b^2}{2\pi^2 M} := m_* b^2.$$



Применяя неравенство Бернштейна

$$\|R_n''\| \leq n^2 \|R_n\|,$$

получаем

$$m_* b^2 \leq |R_n''(0)| \leq n^2 \|R_n\|,$$

откуда с учетом (19),

$$m_* \frac{b^2}{n^2} \leq \|R_n\| \leq \|\tau_n - g\| + \|g - Q\| \leq \|\tau_n - g\| + \frac{\overline{M}^4 \tilde{M} b^4}{8},$$

т.е.

$$\|\tau_n - g\| \geq m_* \frac{b^2}{n^2} - \frac{\overline{M}^4 \tilde{M} b^4}{8} = m_* \frac{b^2}{n^2} \left( 1 - \frac{\overline{M}^4 \tilde{M} b^2 n^2}{8 m_*} \right). \quad (23)$$

Теперь обозначим

$$b_n := \left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{k}{3}},$$

выберем  $N_0$  из условий

$$N_0 > s + 2N - 1, \quad b_{N_0} < \frac{1}{2\overline{M}N}, \quad \frac{\overline{M}^4 \tilde{M}}{8m_*} b_{N_0}^2 N_0^2 < \frac{1}{2},$$

и при всех  $n \geq N_0$  положим

$$f_2(x, s, Y, n, k) := g_{b_n}(x).$$

Вследствие (17)

$$f_2 \in \Delta^{(1)}(Y) \cap \mathbb{C}^{(1)}.$$

Наконец, неравенство (22) следует из (21) и (23):

$$\begin{aligned} \frac{n E_n^{(1)}(f_2, Y)}{\omega_k(f_2'; \frac{1}{n})} &\geq \frac{n \|\tau_n - f_2\|}{\omega_k(f_2'; \frac{1}{n})} \geq m_* \frac{b_n^2}{n} \left( 1 - \frac{\overline{M}^4 \tilde{M} b_n^2 n^2}{8 m_*} \right) : \\ &: \left( 2^{k-3} \overline{M}^3 \tilde{M} b_n^3 + \left( \frac{1}{n} \right)^k M_k \right) \geq \frac{m_* b_n^2}{2n} : \left( 2^{k-3} \overline{M}^3 \tilde{M} b_n^3 + \left( \frac{1}{n} \right)^k M_k \right) =: \\ &=: B_Y n^{\frac{k}{3}-1}. \end{aligned}$$

Для  $n \geq N_0$  неравенство (22) доказано. Для случая  $n < N_0$  оно следует из неравенства  $E_n^{(1)}(f_2; Y) \geq E_{N_0}^{(1)}(f_2; Y)$ . Пример доказан.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Jackson D.* On Approximation by Trigonometric Sums and Polynomials// Trans. Amer. Math. Soc., **13** (1912), S. 419–545.
2. *Zygmund A.* Smooth Functions// Duke math. journ., **12** (1945), 1, S. 46–76.
3. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами// Доклады АН СССР, **83** (1952), 5, С. 651–654.
4. *Копотун К. А.* Равномерные оценки выпуклого приближения многочленами// Мат. заметки, **51** (1992), 3, С. 35–46.

5. *Тиман А. Ф.* Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций на конечном отрезке вещественной оси// ДАН СССР, **78** (1951), 1, С. 17–20.
6. *Дзядык В. К.* О приближении функций обыкновенными многочленами на конечном отрезке вещественной оси// Изв. АН СССР, сер. матем., **22** (1958), 3, С. 337–354.
7. *Freud G.* Über die Approximation Reeller Stetiger Functionen Durch Gewöhnliche Polynome// Math. Ann., **137** (1959), 1, S. 17–25.
8. *Теляковский С. А.* Две теоремы о приближении функций алгебраическими полиномами// Мат. сб., **79** (1966), 2, С. 252–265.
9. *Брудный Ю. А.* Приближение функций алгебраическими многочленами// Изв. АН СССР, сер. матем., **32** (1968), 4, С. 780–787.
10. *Lorentz G. G., Zeller K. L.* Degree of Approximation by Monotone Polynomials II// J. Approx. Theory, **2** (1969), 3, S. 265–269.
11. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: "Наукова думка", 1992. 225 стр.
12. *Шведов А. С.* Комонотонное приближение функций многочленами// ДАН СССР, **250** (1980), 1, 39–42.
13. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: "Наука 1977. 512 стр.